11 Probabilités conditionnelles

Découvrir

1 Probabilités conditionnelles

1

	Éthanol	Non éthanol	Total
Électrique	39	26	65
Non électrique	46	389	435
Total	85	415	500

2 **a)** • $p_1 = \dfrac{85}{500} = 0{,}17$. La probabilité que ce véhicule fonctionne à l'éthanol est 0,17.

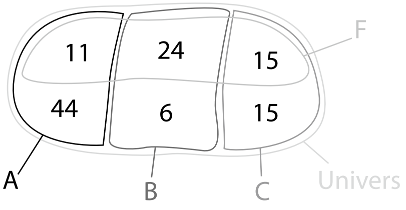
$p_2 = \dfrac{39}{500} = 0{,}078$. La probabilité que ce véhicule ait un fonctionnement hybride est 0,078.

b) $p_3 = \dfrac{39}{65} = 0{,}6$. Parmi les véhicules qui fonctionnent à l'électricité, la probabilité de choisir un véhicule qui fonctionne à l'éthanol est 0,6.

3 **a)** $P_1 = P(B)$; $P_2 = P(A \cap B)$. **b)** $P_3 = \dfrac{P_2}{P_1}$.

2 Formule des probabilités totales

1 **a)**



b) $P(F) = \dfrac{11 + 24 + 15}{115} = \dfrac{50}{115} = \dfrac{10}{23}$.

2 **a)** • $A \cap B$: « L'adhérent choisi pratique l'athlétisme et le badminton ». Cet ensemble est vide.

• $A \cap C$: « L'adhérent choisi pratique l'athlétisme et le canoë ». Cet ensemble est vide.

• $B \cap C$: « L'adhérent choisi pratique le badminton et le canoë ». Cet ensemble est vide.

• $A \cup B \cup C$: « L'adhérent choisi pratique l'athlétisme ou le badminton ou le canoë ».

b) • $P(A \cap F) = \dfrac{11}{115}$ • $P(B \cap F) = \dfrac{24}{115}$

• $P(C \cap F) = \dfrac{15}{115}$

c) $P(A \cap F) + P(B \cap F) + P(C \cap F)$

$$= \frac{11 + 24 + 15}{115} = \frac{50}{115} = \frac{10}{23} = P(F)$$

La somme de ces trois probabilités est égale à la probabilité de F.

Acquérir des automatismes

3 « L'employé choisi est en CDI et a plus de 30 ans » est l'événement $\overline{D} \cap \overline{J}$.

Sa probabilité est :

$$P(\overline{D} \cap J) = P_{\overline{D}} \times P_{\overline{D}}(\overline{J}) = 0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}08.$$

4 Deux boules de l'urne portent des numéros impairs (3 et 5) donc $P(B) = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$.

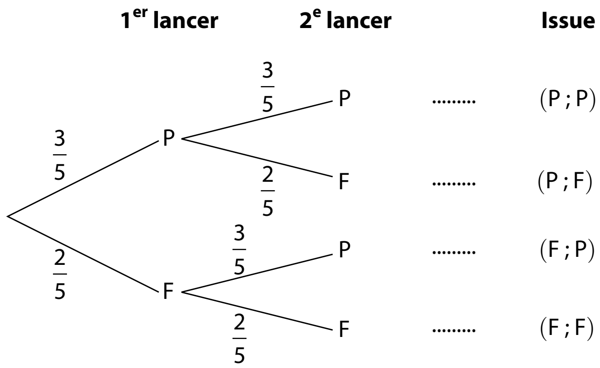
Cinq boules de l'urne portent un numéro inférieur ou égal à 5 (2, 2, 3, 4 et 5) donc $P(C) = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$.

L'événement $B \cap C$ est réalisé par le tirage d'une boule portant un numéro impair et inférieur ou égal à 5 (boule 3 ou boule 5) donc $P(B \cap C) = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$.

Or, $P(B) \times P(C) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{10}$.

Ainsi $P(B \cap C) \neq P(B) \times P(C)$ donc les événements B et C ne sont pas indépendants.

7 **a)** On note P l'événement « La pièce est tombée sur Pile » et F l'événement « La pièce est tombée sur Face ».



b) La probabilité p d'obtenir les deux côtés de la pièce est :

$$p = P(P\,;F) + P(F\,;P) = \frac{3}{5}\times\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\times\frac{3}{5} = \frac{12}{25}.$$

8 Les événements L et $\overline{L}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$P(G) = P(L)\times P_L(G) + P(\overline{L})\times P_{\overline{L}}(G)$

$P(G) = 0{,}4\times 0{,}12 + 0{,}6\times 0{,}15$

$P(G) = 0{,}138$

On en déduit que :

$$P_G(L) = \frac{P(L\cap G)}{P(G)} = \frac{P(L)\times P_L(G)}{P(G)} = \frac{0{,}4\times 0{,}12}{0{,}138} = \frac{8}{23}.$$

La probabilité d'obtenir L sachant qu'on a obtenu G est égale à $\frac{8}{23}$, soit environ 0,348.

9 **a)** $P_A(B)$: probabilité de choisir un élève de Première sachant que l'on a choisi une fille.

b) $P_B(A)$: probabilité de choisir une fille sachant qu'on a choisi un élève de Première.

10 **a)** Branche verte : $P_{\overline{A}}(\overline{B})$.

b) Branche rouge : $P_A(\overline{B})$.

c) Chemin bleu : $P(A\cap B)$.

11 **a)** (3) 0,6 ; **b)** (1) 0,9 ; **c)** (2) 0,18.

12 **a)** Quentin a raison.

En effet, $P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}3}{0{,}6} = \dfrac{1}{2}$.

b) Nadia a tort.

En effet, $P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}35}{0{,}5} = \dfrac{7}{10}$ et $\dfrac{7}{10} \neq \dfrac{5}{35}$.

13 **a)** $P(A\cap B) = P(A)\times P_A(B) = 0{,}2\times 0{,}5 = 0{,}1$.

b) $P(A\cap B) = P(A)\times P_A(B) = 0{,}1\times 0{,}85 = 0{,}085$.

14 On note R l'événement « le joueur joue au Real Madrid F.C. » et F l'événement « le joueur est français ».

a) $P(R) = \dfrac{8}{30} = \dfrac{4}{15} \approx 0{,}267$.

b) $P_R(F) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$.

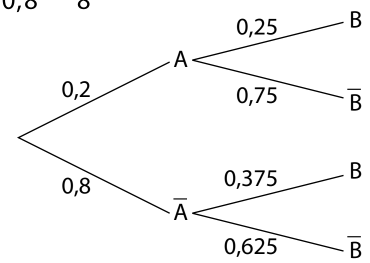
c) $P_F(\overline{R}) = \dfrac{5}{7} \approx 0{,}714$.

15 **a)** • $P(A) = 0{,}2$ • $P(\overline{A}) = 0{,}8$ • $P(A\cap B) = 0{,}05$

• $P(\overline{A}\cap\overline{B}) = 0{,}5$ • $P_A(B) = \dfrac{0{,}05}{0{,}2} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$

• $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \dfrac{0{,}5}{0{,}8} = \dfrac{5}{8} = 0{,}625$

b)



16 **a)** • $P(A\cap B) = P_A(B)\times P(A) = 0{,}4\times 0{,}1 = 0{,}04$.

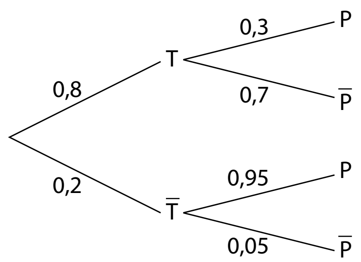
• $P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P_{\overline{A}}(\overline{B})\times P(\overline{A}) = 0{,}2\times 0{,}9 = 0{,}18$.

• $P(A\cap\overline{B}) = P_A(\overline{B})\times P(A) = 0{,}6\times 0{,}1 = 0{,}06$.

b)

	A	$\overline{A}$	**Total**
B	0,04	0,72	0,76
$\overline{B}$	0,06	0,18	0,24
Total	0,1	0,9	1

17 **a)**



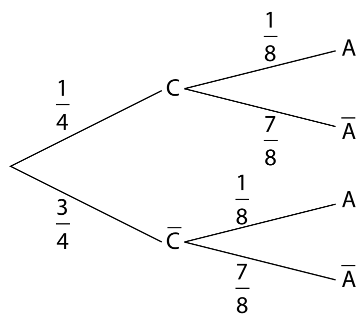
b) • $P(T\cap\overline{P}) = P_T(\overline{P})\times P(T) = 0{,}7\times 0{,}8 = 0{,}56$.

La probabilité qu'un chien choisi au hasard soit traité contre les puces et n'ait pas de puces est égale à 0,56.

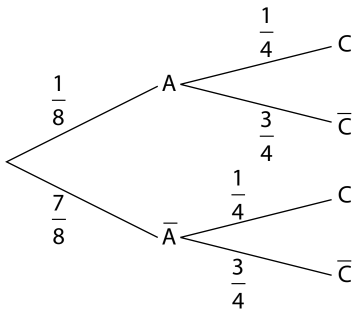
• $P(\overline{T}\cap P) = P_{\overline{T}}(P)\times P(\overline{T}) = 0{,}95\times 0{,}2 = 0{,}19$.

La probabilité qu'un chien choisi au hasard ne soit pas traité contre les puces et ait des puces est égale à 0,19.

18 **1. a)**



b)



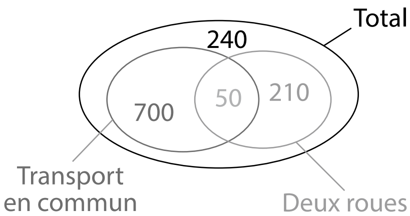
2. • $P(A \cap C) = P_A(C) \times P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$.

La probabilité que la carte tirée soit l'As de cœur est égale à $\frac{1}{32}$.

$P(\overline{A} \cap C) = P_{\overline{A}}(C) \times P(\overline{A}) = \frac{1}{4} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{32}$.

La probabilité que la carte tirée soit un cœur mais pas un As est égale à $\frac{7}{32}$.

19 a)



b) On note T l'événement « L'élève utilise les transports en commun » et R l'événement « L'élève utilise un deux roues ».

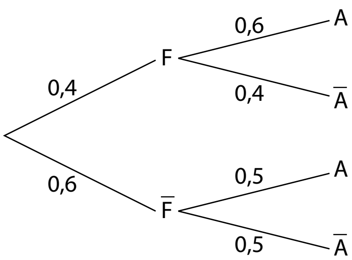
$$P_T(R) = \frac{50}{750} = \frac{1}{15}.$$

Sachant que l'élève utilise les transports en commun, la probabilité qu'il utilise aussi un deux roues est égale à $\frac{1}{15}$, soit environ 0,067.

c) $P_R(\overline{T}) = \frac{210}{260} = \frac{21}{26}$.

Sachant que l'élève utilise un deux roues, la probabilité qu'il n'utilise pas les transports en commun est environ égale à 0,807.

20 a)



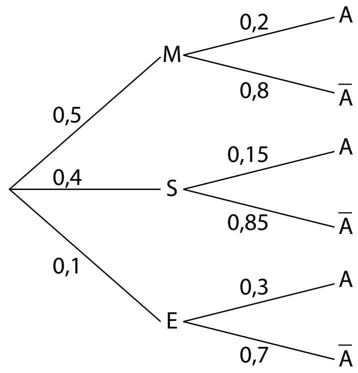
b) • $P(\overline{F} \cap A) = P_{\overline{F}}(A) \times P(\overline{F}) = 0,5 \times 0,6 = 0,3$.

La probabilité que le CV reçu soit celui d'un garçon et soit accepté est égale à 0,3.

• $P(\overline{A} \cap F) = P_F(\overline{A}) \times P(F) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$.

La probabilité que le CV reçu soit celui d'une fille et soit refusé est égale à 0,16.

21 a)



b) • $P(M \cap A) = P_M(A) \times P(M) = 0,2 \times 0,5 = 0,1$.

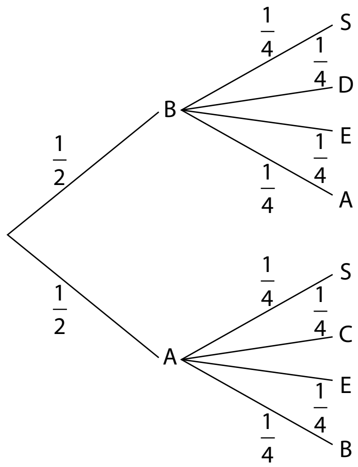
La probabilité que l'arbre choisi soit un mélèze et doive être abattu est égale à 0,1.

• $P(E \cap \overline{A}) = P_E(\overline{A}) \times P(E) = 0,7 \times 0,1 = 0,7$.

La probabilité que l'arbre choisi soit un épicéa et ne doive pas être abattu est égale à 0,07.

22 1. La probabilité que le scarabée se déplace vers le point B sachant qu'il se trouve au point A est $\frac{1}{4}$.

2. a)



b) La probabilité que le scarabée soit au point B au bout de 2 minutes est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

23 Alicia a tort.

En effet, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,8 \times 0,2 = 0,16$ et $0,16 \neq 1$ donc $A \cap B$ n'est pas l'événement certain.

24 a) $P(A) \times P(B) = 0,5 \times 0,4 = 0,2$ et $0,2 \neq 0,3$.

Donc A et B ne sont pas indépendants.

b) $P(A) \times P(B) = 0,7 \times 0,5 = 0,35 = P(A \cap B)$.

Donc A et B sont indépendants.

c) $P(A) \times P(B) = 0,7 \times 0,8 = 0,56 = P(A \cap B)$.

Donc A et B sont indépendants.

25 a) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$P(A \cap B) = 0,5 + 0,4 - 0,7 = 0,2$.

b) A et B ne sont pas incompatibles car $P(A \cap B) = 0,2$ et $0,2 \neq 0$.

c) A et B sont indépendants car

$$P(A) \times P(B) = 0,5 \times 0,4 = 0,2 = P(A \cap B).$$

26 **a)** $P(A \cap B) = 0,4 \times 0,25 = 0,1.$

$P(A) = 0,4$

$P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A)$

$= 0,55 + 0,1 - 0,4 = 0,25$

Or $P(A) \times P(B) = 0,4 \times 0,25 = 0,1 = P(A \cap B)$

donc A et B sont indépendants.

b) $P(A \cap B) = 0,7 \times 0,1 = 0,07$

$P(A) = 0,7$

$P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A)$

$= 0,82 + 0,07 - 0,7 = 0,19$

Or $P(A) \times P(B) = 0,7 \times 0,19 = 0,133$

donc $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$ et A et B ne sont pas indépendants.

27 **a)** Si l'on obtient 3 avec l'un des dés et 4 avec l'autre, alors les événements A et B sont réalisés. Ces événements ne sont donc pas incompatibles.

b) D'une part ; $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ et $P(B) = \frac{11}{36}$,

donc $P(A) \times P(B) = \frac{11}{216}$.

D'autre part, $P(A \cap B) = \frac{2}{36}$.

$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B).$

Donc les événements A et B ne sont pas indépendants.

28 On note S_1 (resp. S_2) l'événement « Le premier (resp. le second) téléphone sonne ».

S_1 et S_2 sont indépendants donc

$$P(S_1 \cap S_2) = P(S_1) \times (PS_2) = 0,6 \times 0,7 = 0,42.$$

$p = P(\overline{S_1} \cap \overline{S_2}) = P(\overline{S_1 \cup S_2}) = 1 - P(S_1 \cup S_2)$

$p = 1 - (P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2))$

$p = 1 - (0,6 + 0,7 - 0,42) = 0,12.$

La probabilité que, dans l'heure qui vient, elle ne soit pas dérangée par un téléphone est égale à 0,12.

29 **a)** Si A et B incompatibles,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, donc $P(B) = \frac{1}{12}$.

b) A et B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A)$

$= P(A \cup B) + P(A)P(B) - P(A)$

$P(B)[1 - P(A)] = P(A \cup B) - P(A)$ donc :

$$P(B) = \frac{P(A \cup B) - P(A)}{1 - P(A)} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$P(B) = \frac{1}{12} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{9}$$

30 On note M_1 (resp. M_2) l'événement « Le premier (resp. le second) moteur de l'avion tombe en panne ».

M_1 et M_2 sont indépendants donc :

$P(M_1 \cap M_2) = P(M_1) \times P(M_2) = 0,000\,1 \times 0,000\,1 = 10^{-8}.$

$p = P(\overline{M_1} \cap \overline{M_2}) = P(\overline{M_1 \cup M_2}) = 1 - P(M_1 \cup M_2)$

$p = 1 - (P(M_1) + P(M_2) - P(M_1 \cap M_2))$

$p = 1 - (0,000\,1 + 0,000\,1 - 10^{-8}) = 0,999\,800\,01$

La probabilité que l'avion arrive à bon port est égale à $0,999\,800\,01$.

31 **1.** On note A (resp. B) l'événement « La première (resp. la seconde) salle est occupée ».

a) $P(A \cup B) = 0,9$ et $P(A \cap B) = 0,5$

De plus, $P(A) = P(B)$.

Donc $2P(A) = P(A \cup B) + P(A \cap B) = 0,9 + 0,5$

$2P(A) = 1,4$ et $P(A) = 0,7$.

Ainsi, $P(\overline{A}) = 0,3$ et la probabilité que la première salle soit libre est égale à 0,3.

b) On peut présenter les résultats avec un tableau croisé.

	A	$\overline{A}$	Total
B	0,5	0,2	0,7
$\overline{B}$	0,2	0,1	0,3
Total	0,7	0,3	1

$$p = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = 0,2 + 0,2 = 0,4.$$

La probabilité qu'une seule salle soit libre est égale à 0,4.

2. $P(A \cap B) = 0,5.$

$$P(A) \times P(B) = 0,7 \times 0,7 = 0,49.$$

Donc $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ et les événements A et B ne sont pas indépendants.

32 • $P(D \cap F) = P(D) \times P_D(F) = 0,2 \times 0,5 = 0,1.$

• $P(\overline{D} \cap F) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(F) = 0,8 \times 0,1 = 0,08.$

• $P(F) = P(D \cap F) + P(\overline{D} \cap F) = 0,1 + 0,08 = 0,18.$

• $P(\overline{F}) = 1 - P(F) = 1 - 0,18 = 0,82.$

33 **a)** Laïla a raison.

En effet, $P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$

$P(D) = 0,3 + 0,4 + 0,08 = 0,78.$

b) Victor a tort.

En effet, $P(D \cap B) = P(D) - P(D \cap A) - P(D \cap C)$

$P(D \cap B) = 0,85 - 0,1 - 0,02 = 0,73$ et $0,73 \neq 0,95.$

34 **a)** $P(A \cap D) = P_A(D) \times P(A) = 0,4 \times 0,1 = 0,04.$

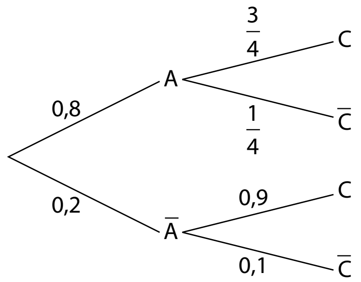
b) A, B, C forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$

$P(D) = 0,04 + 0,5 \times 0,2 + 0,1 \times 0,7 = 0,21.$

c) $P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0,04}{0,21} = \frac{4}{21} \approx 0,19.$

35 **a)**



b) Les événements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

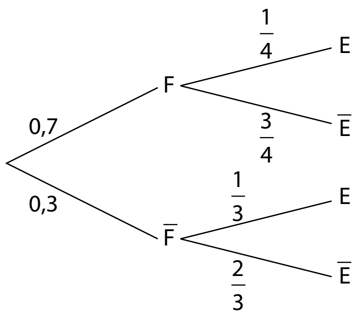
$P(C) = P(A \cap C) + P(\overline{A} \cap C)$

$P(C) = \frac{3}{4} \times 0{,}8 + 0{,}9 \times 0{,}2 = 0{,}78.$

c) $P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{4} \times 0{,}8}{0{,}78} = \frac{10}{13} \approx 0{,}77.$

Sachant qu'elle comporte au moins 5 pièces, la probabilité que l'habitation choisie au hasard soit un appartement est environ égale à 0,77.

36 **a)**



b) $P(F \cap E) = P_F(E) \times P(F) = \frac{1}{4} \times 0{,}7 = 0{,}175$

La probabilité que le passager soit un Français qui parle couramment l'espagnol est égal à 0,175.

Les événements F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(E) = P(F \cap E) + P(\overline{F} \cap E)$

$P(E) = 0{,}175 + \frac{1}{3} \times 0{,}3 = 0{,}275.$

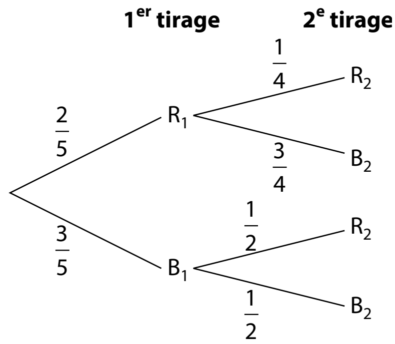
La probabilité que le passager parle couramment l'espagnol est égale à 0,275.

c) $P_E(F) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}175}{0{,}275} = \frac{7}{11}.$

Sachant que le passager choisi parle couramment l'espagnol, la probabilité qu'il soit français est égale à $\frac{7}{11}$, soit environ 0,64.

37 **a)** On note R_1 (resp. B_1) l'événement « la boule tirée est rouge (resp. bleue) au 1er tirage ».

On note R_2 (resp. B_2) l'événement « la boule tirée est rouge (resp. bleue) au 2^{e} tirage ».



b) D'après la formule des probabilités totales :

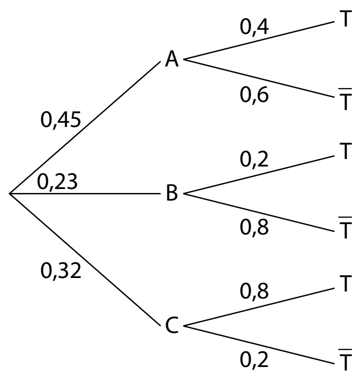
$P(B_2) = P_{R_1}(B_2) \times P(R_1) + P_{B_1}(B_2) \times P(B_1)$

$P(B_2) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = 0{,}6.$

La probabilité que la deuxième boule tirée soit bleue est égale à 0,6.

38 **a)** $P_A(T) = 0{,}4$ signifie que, sachant que l'employé choisi fait partie du service A, la probabilité qu'il réside à moins de 30 min de l'entreprise est égale à 0,4.

b)



c) Les évènements A, B, C forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(T) = P(A \cap T) + P(B \cap T) + P(C \cap T)$

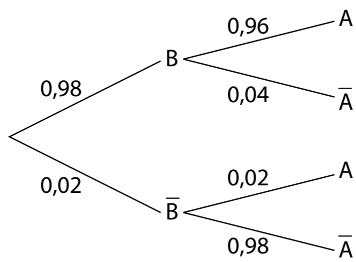
$P(T) = 0{,}4 \times 0{,}45 + 0{,}2 \times 0{,}23 + 0{,}8 \times 0{,}32 = 0{,}482.$

d) $P_T(B) = \frac{P(B \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}2 \times 0{,}23}{0{,}482} \approx 0{,}095.$

Sachant que l'employé réside à moins de 30 min de l'entreprise, la probabilité qu'il fasse partie du service B est égale à 0,095 environ.

39 On note B l'événement « La pièce est bonne » et A l'événement « La pièce est acceptée ».

a)



b) D'après la formule des probabilités totales :

$P(\overline{A}) = P(B \cap \overline{A}) + P(\overline{B} \cap \overline{A})$

$P(\overline{A}) = 0{,}98 \times 0{,}04 + 0{,}02 \times 0{,}98 = 0{,}058\,8.$

c) La probabilité qu'il y ait une erreur est :

$P(B \cap \overline{A}) + P(\overline{B} \cap A)$

$= 0{,}98 \times 0{,}04 + 0{,}02 \times 0{,}02 = 0{,}039\,6.$

40 **a)** La probabilité qu'il ait moins de 15 ans est :

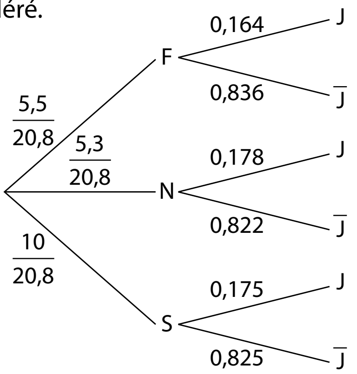
$$p = \frac{16{,}4\ \% \times 5{,}5 + 17{,}8\ \% \times 5{,}3 + 17{,}5\ \% \times 10}{5{,}5 + 5{,}3 + 10}$$

$p \approx 0{,}173.$

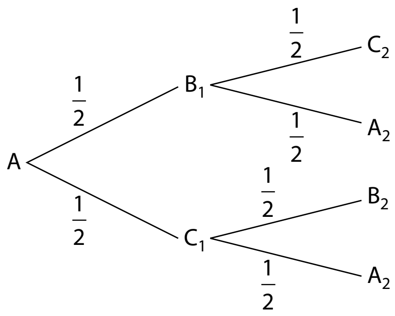
b) Cet habitant a moins de 15 ans, la probabilité qu'il soit suédois est :

$$p' = \frac{\dfrac{17{,}5\ \% \times 10}{5{,}5 + 5{,}3 + 10}}{p} \approx \frac{0{,}084}{0{,}173} \approx 0{,}486.$$

On peut également représenter la situation par un arbre pondéré.



41 **a)** **1er déplacement** **2e déplacement**



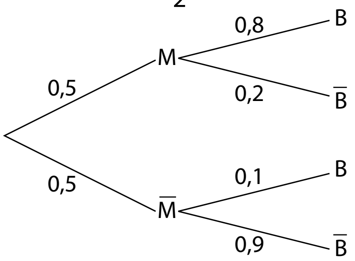
b) D'après la formule des probabilités totales :

$P(A_2) = P(B_1 \cap A_2) + P(C_1 \cap A_2)$

$P(A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

La probabilité qu'il se retrouve en A à l'issue de deux déplacements est égale à $\frac{1}{2}$.

42



On note M l'événement « L'individu a pris le médicament » et B l'événement « Le taux de glycémie a baissé de façon significative ».

D'après l'énoncé ; $P(M) = 0{,}5$,

$P_M(B) = 0{,}8$ et $P_{\overline{M}}(B) = 0{,}1$.

La probabilité que le taux de glycémie de la personne choisie au hasard ait baissé de façon significative, c'est-à-dire $P(B)$, est donnée par :

$$P(B) = P(M \cap B) + P(\overline{M} \cap B)$$
$$P(B) = 0{,}5 \times 0{,}8 + 0{,}5 \times 0{,}1$$
$$P(B) = 0{,}45$$

43 **a)** F est l'évènement « Le candidat est une fille » et A est l'évènement « Le candidat est admis ».

D'après l'énoncé, $P(F) = 0{,}52$; $P(F \cap A) = 0{,}39$; $P_{\overline{F}}(A) = 0{,}7$.

Ainsi, $P_F(A) = \frac{P(F \cap A)}{P(F)} = \frac{0{,}39}{0{,}52} = 0{,}75.$

La probabilité qu'une fille qui se présente soit admise est égale à 0,75.

b) Les événements F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(F \cap A) + P(\overline{F} \cap A)$$
$$P(A) = 0{,}39 + P_{\overline{F}}(A) \times P(\overline{F})$$
$$P(A) = 0{,}39 + 0{,}7 \times (1 - 0{,}52) = 0{,}726.$$

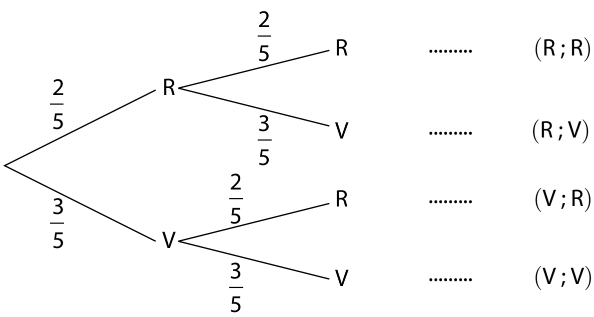
La probabilité qu'un candidat soit admis est égale à 0,726.

44 **a) (2)** $\frac{1}{36}$; **b) (1)** $\frac{2}{36}$; **c) (3)** $\frac{1}{6}$.

45 **a) Faux.** Elle est égale à $0{,}1 \times 0{,}1$ soit 0,01.

b) Vrai. En effet, elle est égale à $0{,}9 \times 0{,}9$ soit 0,81.

46 **a)** **1er tirage** **2e tirage** **Issue**



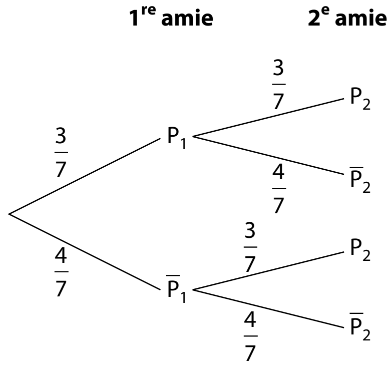
b) $P(A) = P(R\,;R) + P(V\,;V)$

$P(A) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{13}{25} = 0{,}52.$

$P(B) = P(V\,;R) + P(R\,;V) + P(V\,;V)$

$P(B) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{21}{25} = 0{,}84.$

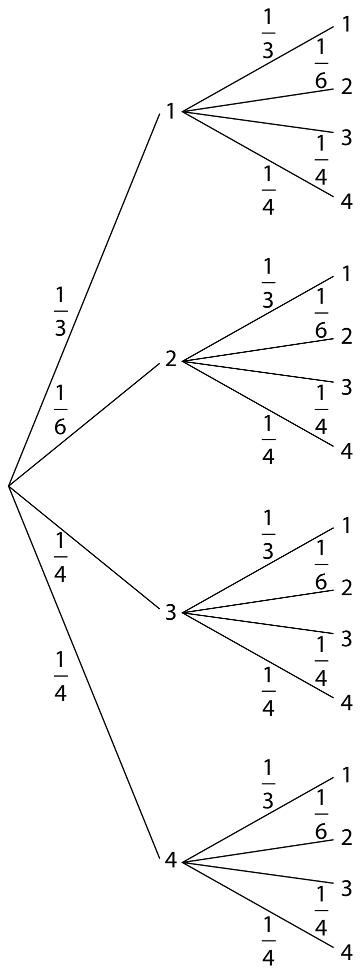
47 **a)** On note P_i l'évènement « Le chiffre choisi par l'amie i est pair ».



b) La probabilité qu'Alice ait raison est :

$P(P_1 \cap P_2) = \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$.

48 **a)**



b) La probabilité que les numéros obtenus soient identiques est :

$p = P(1\,;1) + P(2\,;2) + P(3\,;3) + P(4\,;4)$

$p = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$

$p = \frac{19}{72} \approx 0{,}264$.

49 La probabilité que les deux pièces proviennent d'un pays différent est :

$$p = P(A\,;E) + P(E\,;A) + P(A\,;F) + P(F\,;A) + P(E\,;F) + P(F\,;E)$$

$$p = 6 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

50 La probabilité que l'automobiliste croise un feu vert et un orange est :

$$p = P(V\,;O) + P(O\,;V)$$

$$p = \frac{35}{60} \times \frac{5}{60} + \frac{5}{60} \times \frac{35}{60}$$

$$p = \frac{7}{72} \approx 0{,}097.$$

51 **1.** D ; **2.** C ; **3.** A ; **4.** D.

52 **1.** A, B, C, D ; **2.** A, B, C ; **3.** A, B, D.

55 **1. Vrai.** En effet, $P(A) + P(B) + P(C) = 1$ donc $P(B) = 1 - P(A) - P(C) = 1 - 0{,}3 - 0{,}4$.

2. Faux. En effet, $P_C(D) = 1 - P_C(\overline{D}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

3. Vrai. En effet, $P(B) = 0{,}3$ et $P_B(D) = 1 - P_B(\overline{D}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$ donc $P(B \cap D) = 0{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}24$.

4. Vrai. En effet, $P(D) = 0{,}3 \times 0{,}7 + 0{,}3 \times 0{,}8 + 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}65$.

5. Faux. En effet, $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$.

6. Vrai. En effet, $P_D(A) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)} = \frac{0{,}3 \times 0{,}7}{0{,}65} = \frac{21}{65}$.

7. Vrai. En effet, $P_{\overline{D}}(B) = \frac{P(\overline{D} \cap B)}{P(\overline{D})} = \frac{0{,}3 \times 0{,}2}{0{,}35} = \frac{6}{35}$.

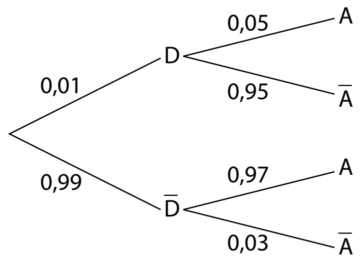
8. Faux. En effet, $P(D \cap A) = 0{,}21$ et $P(D) \times P(A) = 0{,}65 \times 0{,}3 = 0{,}195$ donc $P(D \cap A) \neq P(D) \times P(A)$.

54 La phrase (1) signifie « La probabilité qu'un individu choisi au hasard soit vacciné est 0,3 », soit $P(V) = 0{,}3$.

La phrase (2) signifie « Sachant qu'un individu est vacciné, la probabilité qu'il soit malade est $\frac{1}{5}$ », soit $P_V(M) = \frac{1}{5}$.

La phrase (3) signifie « Sachant qu'un individu est non vacciné, la probabilité qu'il soit malade est $\frac{1}{3}$ », soit $P_{\overline{V}}(M) = \frac{1}{3}$.

55 **a)**



b) $P(D \cap A) = P_D(A) \times P(D) = 0{,}05 \times 0{,}01 = 0{,}000\,5$.
La probabilité que la pièce choisie soit défectueuse et acceptée au contrôle est $0{,}000\,5$.

56 Les événements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(B) = P_A(B) \times P(A) + P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A})$
$P(B) = 0{,}25 \times 0{,}8 + 0{,}6 \times 0{,}2$
$P(B) = 0{,}32$.

La probabilité que le touriste choisi parle anglais est égale à 0,32.

S'entraîner

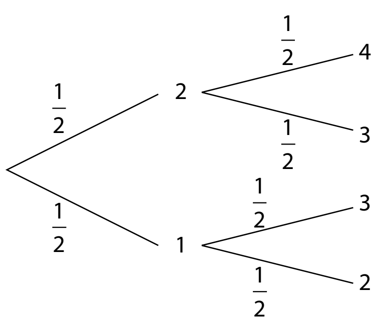
58 **a)**

```
p ← 0
Pour i allant de 1 à 2
    a ← un nombre aléatoire de [0 ; 1]
    Si a < 0,5, alors
        p ← p + 2
        sinon
        p ← p + 1
    Fin Si
Fin Pour
Afficher p
```

b) L'arbre des probabilités ci-dessous indique les numéros des cases où le lapin peut se situer après chaque déplacement. La probabilité que le lapin termine son parcours sur la case numéro 3 est donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

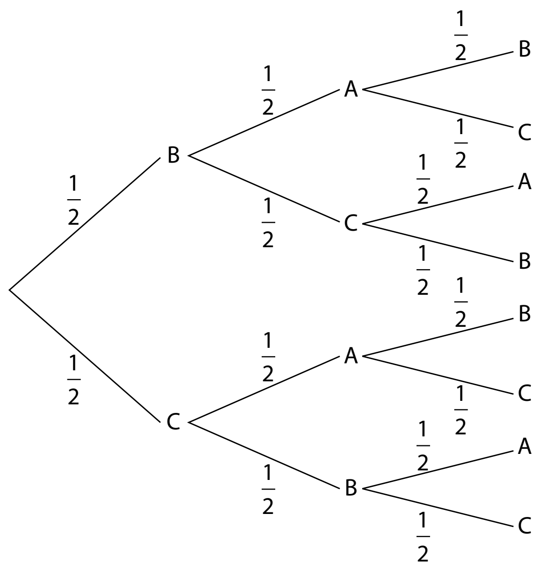
1er déplacement **2e déplacement**



59 **a)**

```
p ← 0
Pour i allant de 1 à 3
    a ← un nombre aléatoire de [0 ; 1]
    Si p = 0
        Si a < 1/2 alors
         p ← 1
        sinon
         p ← 2
        Fin Si
    Fin Si
    Si p = 1 alors
        Si a < 1/2 alors
         p ← 0
        sinon
         p ← 2
        Fin Si
    Fin Si
    Si p = 2 alors
        Si a < 1/2 alors
         p ← 0
        Sinon
         p ← 1
        Fin Si
    Fin Si
Fin Pour
Afficher p
```

b) On représente la situation par un arbre pondéré.



D'après la formule des probabilités totales, la probabilité que la fourmi termine son parcours au point A est $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

61 Dans la cellule G2, on saisit la formule =NB.SI(E2:E1001;1)/1000

La probabilité de gagner une partie est estimée, grâce au tableur, à environ 0,678 (on se rapproche de la probabilité obtenue par le calcul).

62 Dans la cellule E2, on saisit : =SI(D2<=9; SI(ALEA()<0.1;0;1); SI(ALEA()<0.5;0,1))

Pour simuler 500 parties, on recopie jusqu'à la ligne 501.

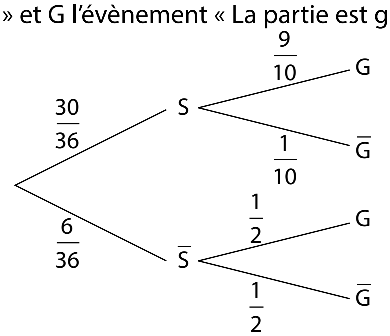
Dans la cellule G2, on saisit : =NB.SI(E2:E501;1)/500

I15

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Numéro de partie	Dé 1	Dé 2	Somme des deux dés	Réponse de la fille : juste=1 ; fausse=0		Probabilité de gagner une partie	
2	1	1	4	5	1		0,834	
3	2	6	6	12	1			
4	3	5	5	10	0			
5	4	5	4	9	1			
6	5	2	5	7	1			
7	6	3	3	6	1			
8	7	4	4	8	1			
9	8	3	2	5	1			
10	9	3	2	5	1			
11	10	1	1	2	1			
12	11	3	4	7	1			

Il semble que la probabilité de gagner une partie soit environ 0,8.

On joue une partie au hasard et on note S l'événement « La somme des deux dés est inférieure ou égale à 9 » et G l'évènement « La partie est gagnée ».



Avec un tableau croisé, on constate qu'il y a 30 façons d'obtenir une somme inférieure ou égale à 9.

D'après la formule des probabilités totales :

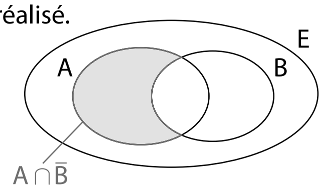
$$P(G)=P(G\cap S)+P(G\cap\overline{S})=\frac{9}{10}\times\frac{30}{36}+\frac{1}{2}\times\frac{6}{36}=\frac{5}{6}$$

soit $P(G)\approx 0{,}83$.

63 **1. a)** $P_A(\overline{B})$ désigne la probabilité que B ne se réalise pas sachant que A s'est réalisé.

$P_A(B)$ désigne la probabilité que B se réalise sachant que A s'est réalisé.

b)



$P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)$.

c) $P(A\cap\overline{B})=P_A(\overline{B})\times P(A)$

Donc, $P_A(\overline{B})\times P(A)=P(A)-P(A\cap B)$

$P_A(\overline{B})\times P(A)=P(A)-P_A(B)\times P(A)$

d'où $P_A(\overline{B})=\dfrac{P(A)-P_A(B)\times P(A)}{P(A)}$ et $P_A(\overline{B})=1-P_A(B)$.

2. On montre de même que $P_{\overline{A}}(B)=1-P_{\overline{A}}(\overline{B})$.

64 **1. a)** On doit démontrer que

$$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P(B)$$

b) $P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$.

c) Or A et B sont indépendants, donc

$P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A)\times P(B)$

$P(\overline{A}\cap B)=P(B)\times(1-P(A))$

$P(\overline{A}\cap B)=P(B)\times P(\overline{A})$

Ce qui prouve que $\overline{A}$ et B sont indépendants.

2. On procède de même :

$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})-P(\overline{A}\cap B)$

$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})-P(\overline{A})\times P(B)$ (car $\overline{A}$ et B sont indépendants)

$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})(1-P(B))=P(\overline{A})\times P(\overline{B})$ donc $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

3. a) On a alors $P(A\cap B)=P_A(B)\times P(A)=P(A)\times P(B)$ donc $P_A(B)=P(B)$

et $P(\overline{A}\cap B)=P_{\overline{A}}(B)\times P(\overline{A})=P(\overline{A})\times P(B)$

donc $P_{\overline{A}}(B)=P(B)$.

Ainsi $P_A(B)=P_{\overline{A}}(B)=P(B)$ lorsque A et B sont indépendants.

On démontre de la même façon que

$$P_B(A)=P_{\overline{B}}(A)=P(A).$$

b) A et B sont indépendants lorsque la réalisation ou non de A n'a pas d'influence sur la réalisation de B (et réciproquement).

65 A est indépendant avec lui-même lorsque $P(A\cap A)=P(A)\times P(A)$ ce qui équivaut à $P(A)=P(A)^2$ ou encore $P(A)(1-P(A))=0$ soit $P(A)=0$ ou $P(A)=1$.

A est donc soit l'événement impossible soit l'événement certain.

66 **a)** $P(A\cap B)=P_A(B)\times P(A)=P_B(A)\times P(B)$.

b) A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$$

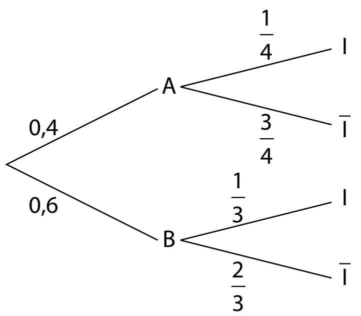
c) D'après le **a)**,

$$P_B(A)=\frac{P_A(B)\times P(A)}{P(B)}$$

$$P_B(A)=\frac{P_A(B)\times P(A)}{P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)}$$

$$P_B(A)=\frac{P_A(B)\times P(A)}{P_A(B)\times P(A)+P_{\overline{A}}(B)\times P(\overline{A})}$$

67 **a)**



b) A et B forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

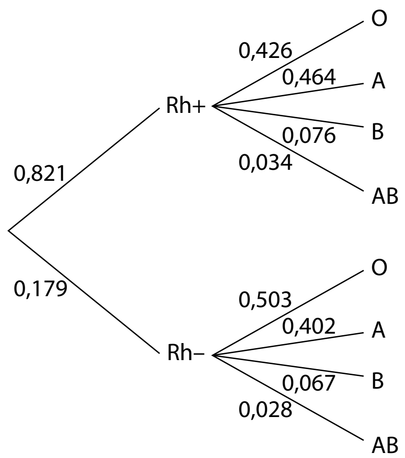
$P(I) = P_A(I) \times P(A) + P_B(I) \times P(B)$

$P(I) = \dfrac{1}{4} \times 0{,}4 + \dfrac{1}{3} \times 0{,}6 = 0{,}3.$

c) $P_I(A) = \dfrac{P(A \cap I)}{P(I)} = \dfrac{\frac{1}{4} \times 0{,}4}{0{,}3} = \dfrac{1}{3}.$

Donc $P_I(A) \neq \dfrac{1}{2}$. Le fournisseur se trompe.

68 **a)**



Par exemple, le tableau indique :

$P(Rh + \cap A) = 0{,}381$ et $P(Rh+) = 0{,}821$

donc $P_{Rh+}(A) = \dfrac{P(Rh + \cap A)}{P(Rh+)} = \dfrac{0{,}381}{0{,}821} \approx 0{,}464.$

b) Les événement $Rh+$ et $Rh-$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales.

$PO = P(Rh + \cap O) + P(Rh - \cap O)$

$PO \approx 0{,}426 \times 0{,}821 + 0{,}503 \times 0{,}179$

$PO \approx 0{,}440.$

La probabilité qu'une personne choisie au hasard soit du groupe O est d'environ 0,44.

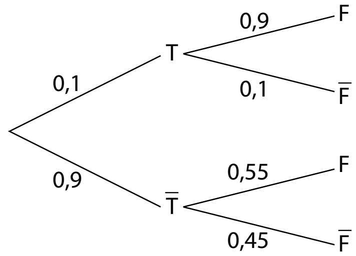
69

	A	$\overline{\text{A}}$	Total
B	0,075	0,45	0,525
$\overline{\text{B}}$	0,175	0,3	0,475
Total	0,25	0,75	1

Par exemple,

$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = 0{,}3 \times 0{,}25 = 0{,}075.$$

70 **a)** On note T l'événement « L'élève a lu le 7ᵉ tome » et F l'événement « L'élève a vu le 7ᵉ film ». On représente la situation par un arbre pondéré.



D'après la formule des probabilités totales :

$P(F) = P(T \cap F) + P(\overline{T} \cap F)$

$P(F) = 0{,}1 \times 0{,}9 + 0{,}9 \times 0{,}55$

$P(F) = 0{,}585.$

b) On en déduit la probabilité demandée :

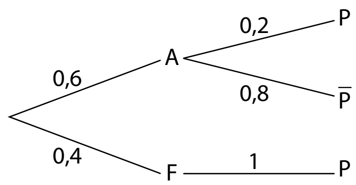
$P_F(T) = \dfrac{P(F \cap T)}{P(F)}$

$P_F(T) = \dfrac{0{,}09}{0{,}585}$

$P_F(T) \approx 0{,}154.$

71 On note A (resp. F) l'événement « Le touriste choisi est Anglais (resp. Français) » et P l'événement « Le touriste choisi parle français ».

On représente la situation par un arbre pondéré.



Les événements A et F forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

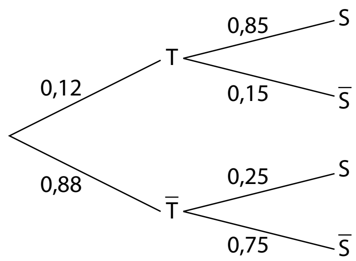
$P(P) = P(A \cap P) + P(F \cap P)$

$P(P) = 0{,}2 \times 0{,}6 + 1 \times 0{,}4$

$P(P) = 0{,}52.$

La probabilité que le touriste choisi comprenne les explications du guide est égale à 0,52.

72 **a)**



b) Les événements T et $\overline{\text{T}}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formules des probabilités totales :

$P(S) = P(T \cap S) + P(\overline{T} \cap S)$

$P(S) = 0{,}85 \times 0{,}12 + 0{,}25 \times 0{,}88$

$P(S) = 0{,}322.$

c) $P_{\overline{S}}(T) = \dfrac{P(T \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \dfrac{P_T(\overline{S}) \times P(T)}{1 - P(S)}$

$P_{\overline{S}}(T) = \dfrac{0{,}15 \times 0{,}12}{1 - 0{,}322} \approx 0{,}027.$

Sachant que l'équipementier ne l'a pas sponsorisé, la probabilité qu'il ait fini dans les trois premiers est environ égale à 0,027.

73 On note A l'événement « Le voyageur a choisi le train de 7 h 27 » et R l'événement « Le voyageur arrive en retard ». D'après la formule des probabilités totales :

$P(R) = P(A \cap R) + P(\overline{A} \cap R)$

$P(\overline{A} \cap R) = P(R) - P(A \cap R)$

$P(\overline{A} \cap R) = 0{,}06 - 0{,}8 \times 0{,}05$

$P(\overline{A} \cap R) = 0{,}02$

$P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(R) = 0{,}02$

$0{,}2 \times P_{\overline{A}}(R) = 0{,}02$

$P_{\overline{A}}(R) = 0{,}1.$

74 **1. a)** $\overline{A}$ est l'événement « Les élèves choisies sont toutes les deux des filles ».

$$P(\overline{A}) = P(F\,;F) = \frac{18}{32} \times \frac{18}{32} = \frac{81}{256}.$$

b) $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \dfrac{175}{256}.$

2. a) $\overline{B}$ est l'événement « Aucun des deux élèves choisis n'est une fille » autrement dit « Les deux élèves choisis sont des garçons ».

$$P(\overline{B}) = P(G\,;G) = \frac{14}{32} \times \frac{14}{32} = \frac{49}{256}.$$

b) $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = \dfrac{207}{256}.$

75 **a)** • $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P(\overline{B})$

$= 0{,}01 \times 0{,}95 = 0{,}009\,5.$

• $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P(B) = 0{,}99 \times 0{,}05 = 0{,}049\,5.$

• $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) = 0{,}99 \times 0{,}95 = 0{,}940\,5.$

• $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}01 \times 0{,}05 = 0{,}000\,5.$

b) Présenter uniquement le défaut B se traduit par $\overline{A} \cap B$.

La probabilité que ces deux enceintes présentent uniquement le défaut B est :

$$0{,}049\,5 \times 0{,}049\,5 \approx 0{,}002\,5.$$

76 **a)** $P(A) \times P(F) = \dfrac{138}{240} \times \dfrac{160}{240} = \dfrac{23}{60}.$

$P(A \cap F) = \dfrac{92}{240} = \dfrac{23}{60}.$

Ainsi $P(A \cap F) = P(A) \times P(F)$ et les événements A et F sont indépendants.

b) $A \cap F$ est l'événement « Le licencié est une femme adulte ».

La probabilité cherchée est :

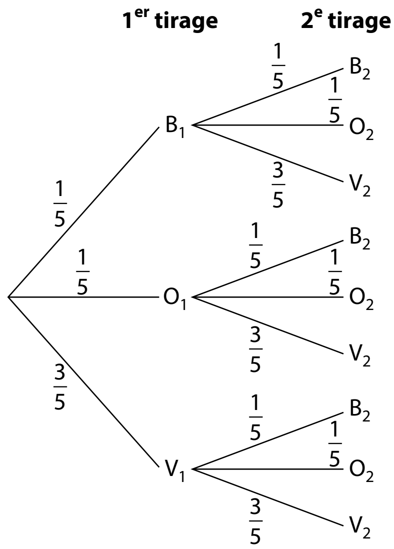
$p = P(A \cap F\,;\overline{A \cap F}) + P(\overline{A \cap F}\,;A \cap F) + P(A \cap F\,;A \cap F)$

$p = \dfrac{23}{60} \times \dfrac{37}{60} + \dfrac{37}{60} \times \dfrac{23}{60} + \dfrac{23}{60} \times \dfrac{23}{60}$

$p \approx 0{,}62.$

77 **Situation 1**

a)



b) $P(A) = P(B_1 \cap V_2) + P(O_1 \cap V_2) + P(V_1)$

$P(A) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}$

$P(A) = 0{,}84.$

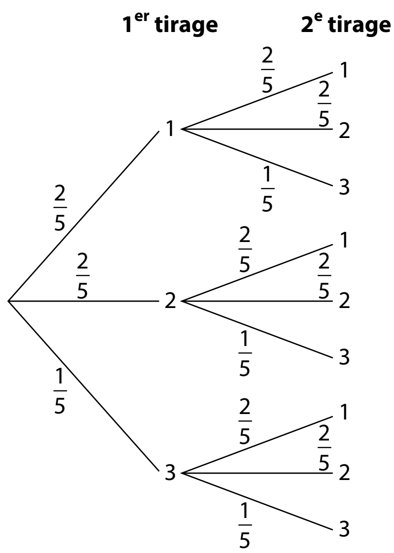
La probabilité qu'au moins l'une des boules tirées soit verte est égale à 0,84.

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(O_1 \cap O_2) = 1 - \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{5} = 0{,}96.$

La probabilité que les deux boules tirées ne soit pas oranges est égale à 0,96.

Situation 2

a)



b) $P(C) = P(1\,;1) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = 0{,}16.$

$P(D) = 1 - P(\overline{D})$

$P(D) = 1 - (P(1\,;2) + P(2\,;1))$

$P(D) = 1 - \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{2}{5}$

$P(D) = 0{,}68.$

78 **a)** L'implication et vraie car :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).$$

La réciproque est « Si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, alors $P_A(B) = P(B)$ ».

Elle est aussi vraie car $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

b) L'implication est vraie, c'est la formule des probabilités totales.

La réciproque est « Si $P(C) + P(D) = P(A)$, alors $C = A \cap B$ et $D = A \cap \overline{B}$ ». Elle est fausse car C et D peuvent être deux événements sans rapport avec A et B.

c) L'implication est vraie car si A et B sont incompatibles, $P(A \cap B) = 0$, or $P(A) \times P(B) \neq 0$.

La réciproque est « Si A et B ne sont pas indépendants, alors ils sont incompatibles ». Elle est fausse car le fait que $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$ n'implique pas que $P(A \cap B) = 0$.

d) L'implication est vraie car si $A \cap B = \varnothing$, alors $P(A \cap B) = 0$ et donc $P_A(B) = 0$.

La réciproque est « Si $P_A(B) = 0$, alors $A \cap B = \varnothing$ ». Elle est vraie car $P_A(B) = 0$ implique $P(A \cap B) = 0$ donc $A \cap B = \varnothing$.

79 **a)** Pour tout événement A ; on a $P_A(A) = 1$.

b) Il existe un événement C tel que $P(A) + P(C) = 1$.

c) Pour tous événements A et B, on a

$$P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B).$$

Organiser son raisonnement

80 La probabilité que la mutation ait lieu est :

$$p = P(G_1 \cap G_2 \cap G_3) + P(\overline{G_1} \cap G_2 \cap G_3) + P(G_1 \cap \overline{G_2} \cap G_3) + P(G_1 \cap G_2 \cap \overline{G_3})$$

Or les trois gènes sont indépendants et donc les trois mutations le sont, donc

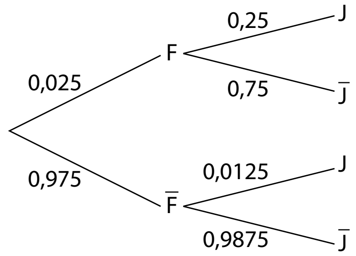
$$p = P(G_1) \times P(G_2) \times P(G_3) + P(\overline{G_1}) \times P(G_2) \times P(G_3) + P(G_1) \times P(\overline{G_2}) \times P(G_3) + P(G_1) \times P(G_2) \times P(\overline{G_3})$$

$$p = 0{,}02 \times 0{,}03 \times 0{,}05 + 0{,}98 \times 0{,}03 \times 0{,}05 + 0{,}02 \times 0{,}97 \times 0{,}05 + 0{,}02 \times 0{,}03 \times 0{,}95$$

$p = 0{,}003\,04.$

Ainsi, sur 50 000 animaux, 152 animaux présenteront cette mutation $(50\,000 \times 0{,}003\,04 = 152)$.

81 On note F l'événement « Recours à une FIV » et J l'événement « Naissance de jumeaux ». On peut représenter la situation par un arbre pondéré.



D'après la formule des probabilités totales :

$P(J) = P(F \cap J) + P(\overline{F} \cap J)$

$P(J) = 0{,}025 \times 0{,}25 + 0{,}975 \times 0{,}012\,5$

$P(J) \approx 0{,}018.$

La probabilité demandée est donc :

$P_J(F) = \frac{P(J \cap F)}{P(J)}$

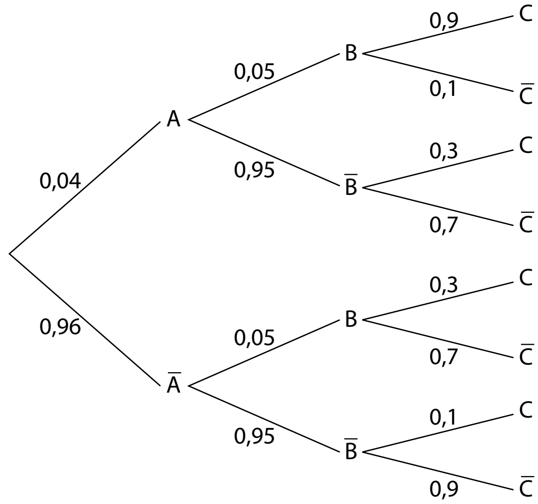
$P_J(F) = \frac{0{,}006\,25}{0{,}018}$

$P_J(F) \approx 0{,}347.$

L'affirmation de Tom n'est donc pas correcte. Il est plus probable que ce ne soit pas suite à une FIV.

82 On note A l'événement « le père est asthmatique », B l'événement « la mère est asthmatique » et C l'événement « l'enfant est asthmatique ».

On peut donc représenter la situation par un arbre pondéré.



D'après la formule des probabilités totales :

$P(C) = 0{,}04 \times 0{,}05 \times 0{,}9 + 0{,}05 \times 0{,}95 \times 0{,}3$
$\quad + 0{,}95 \times 0{,}05 \times 0{,}3 + 0{,}95 \times 0{,}95 \times 0{,}1$

$P(C) = 0{,}118\,8$

La probabilité qu'aucun des parents ne soient asthmatiques sachant que l'enfant ne l'est pas est :

$P_{\overline{C}}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})}{P(\overline{C})}$

$P_{\overline{C}}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \dfrac{0{,}95 \times 0{,}95 \times 0{,}9}{1 - 0{,}118\,8}$

$P_{\overline{C}}(\overline{A} \cap \overline{B}) \approx 0{,}931$

La probabilité demandée est :

$1 - P_{\overline{C}}(\overline{A} \cap \overline{B}) \approx 0{,}069.$

83 **1. a)** La variable p correspond à la position de la fourmi. La variable a prend des valeurs aléatoires qui indiquent dans quelle direction la fourmi se déplace.

b) Il faut compléter l'algorithme par les lignes suivantes, avant Fin Si :

```
Si p = 2 alors
    a ← un nombre aléatoire de [0 ; 1]
    Si a < 0,75 alors
        p ← 3
        Sinon
        p ← 1
    Fin Si
Fin Si
Si p = 3 alors
    a ← un nombre aléatoire de [0 ; 1]
    Si a < 0,75 alors
        p ← 1
        sinon
        p ← 2
    Fin Si
Fin Si
```

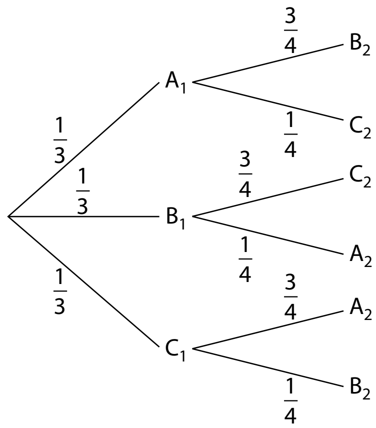
c) Voici le programme en langage Python.

```
from random import *
p=randint(1,3)
if p==1:
    a=random()
    if a<0.75:
        p=2
    else:
        p=3
else:
    if p==2:
        a=random()
        if a<0.75:
            p=3
        else:
            p=1
    else:
        if p==3:
            a=random()
            if a<0.75:
                p=1
            else:
                p=2
print(p)
```

2. a) D'après l'énoncé, $P(A_1) = \dfrac{1}{3}$.

b) $P_{B_1}(A_2) = \dfrac{1}{4}$ et $P_{C_1}(A_2) = \dfrac{3}{4}$.

c) Arbre de probabilités :

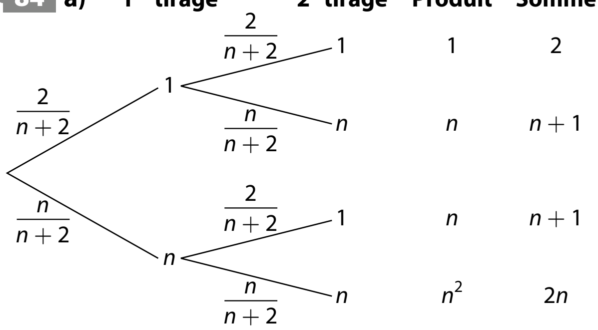


d) D'après la formule des probabilités totales,

$$P(A_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

e) De même, $P(B_2) = \dfrac{1}{3}$ et $P(C_2) = \dfrac{1}{3}$.

84 **a)** **1^er^ tirage** **2^e^ tirage** **Produit** **Somme**



$P(A) = \dfrac{2}{n+2} \times \dfrac{n}{n+2} + \dfrac{n}{n+2} \times \dfrac{2}{n+2} = \dfrac{4n}{(n+2)^2}$

$P(B) = \dfrac{2}{n+2} \times \dfrac{2}{n+2} = \dfrac{4}{(n+2)^2}$

Ainsi, $P(A) = 10P(B)$ équivaut à $4n = 10 \times 4$ soit $n = 10$.

b) $P(C) = \dfrac{n}{n+2} \times \dfrac{n}{n+2} = \dfrac{n^2}{(n+2)^2}$.

$P(D) = \dfrac{2}{n+2} \times \dfrac{n}{n+2} + \dfrac{n}{n+2} \times \dfrac{2}{n+2} = \dfrac{4n}{(n+2)^2}$.

Ainsi, $P(C) = 5P(D)$ équivaut $n^2 = 5 \times 4n$ soit $n = 0$ ou $n = 20$ (mais $n \neq 0$) donc l'unique solution est $n = 20$.

85 $P_{\overline{A}}(B) = 1 - P_{\overline{A}}(C) - P_{\overline{A}}(D) = 1 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{5}{8}$.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P_A(B) \times P(A) + P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A})}$$

Ainsi, $0{,}4 = \dfrac{P_A(B)\times\frac{1}{2}}{P_A(B)\times\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\times\frac{1}{2}}$

ce qui est successivement équivalent à :

$0{,}4\left(P_A(B)\times\frac{1}{2}+\frac{5}{16}\right)=P_A(B)\times\frac{1}{2}$

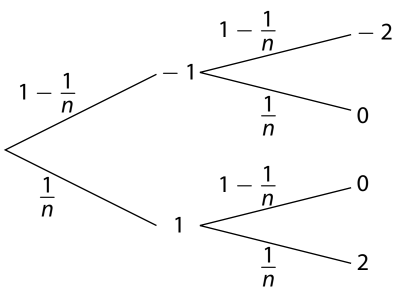
$0{,}2\times P_A(B)+0{,}125=0{,}5P_A(B)$

$0{,}125=0{,}3P_A(B)$

$P_A(B)=\frac{5}{12}.$

86 **a)** On peut conjecturer que Lauriane a raison, sauf de $n=1$ à $n=2$.

b) On peut représenter la situation par un arbre pondéré, où on indique la position du pion, de la gauche vers la droite, par un nombre entier compris entre -2 et 2.



La probabilité que le pion soit au centre après deux déplacements est donc :

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\frac{1}{n}\times 2=\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}=\frac{2n-2}{n^2}$$

On peut alors étudier la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x-2}{x^2}$.

$f'(x)=\dfrac{-2x+4}{x^3}n$ donc $f'(x)$ est négatif pour $x\geqslant 2$, donc la fonction f est décroissante pour $n\geqslant 2$. Lauriane a donc raison, sauf de $n=1$ à $n=2$.

87 On note A l'événement « Au moins l'une des trois pommes choisies par Blanche-Neige est empoisonnée ».

Donc $\overline{A}$ est l'événement « Aucune des trois pommes n'est empoisonnée ».

$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{13}{16}\times\frac{12}{15}\times\frac{11}{14}$

$P(A)\approx 0{,}49.$

La probabilité que Blanche-Neige soit réveillée bien plus tard par son Prince Charmant est environ égale à 0,49.

88 **1. a)** • $M(x\,;y)$ est situé dans le carré OABC si, et seulement si, $0\leqslant x\leqslant 1$ et $0\leqslant y\leqslant 1$.

• $M(x\,;y)$ est situé dans le domaine bleu si et seulement si, $0\leqslant x\leqslant 1$ et $0\leqslant y\leqslant x^2$.

b) aire $(OABC)=1\times 1=1$.

c) • ligne 6 : on choisit une valeur de x au hasard de l'intervalle $[0\,;1]$.

• ligne 7 : on choisit une valeur de y au hasard de l'intervalle $[0\,;1]$.

• ligne 10 : Le compteur s'incrémente lorsque le point $M(x\,;y)$ est situé dans l'aire bleue et A donne la fréquence obtenue pour la simulation de 10 000 expériences.

d) Valeur approchée de l'aire bleue affichée par le programme : $A\approx 0{,}333\,4$.

2. a) Voici le programme en langage Python.

```
from random import *
n=0
for i in range(0,100000):
    x=random()
    y=random()
    if x**2+y**2<=1:
        n=n+1
A=n/100000
print("Aire(bleue) ",A)
```

b) Valeur approchée de l'aire bleue affichée par le programme : 0,784 73

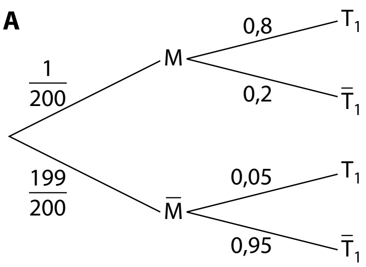
(pour la simulation de 100 000 expériences).

c) Le disque bleu a pour rayon $\frac{1}{2}$, donc :

Aire (bleue) $=\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\approx 0{,}784\,73$

Ainsi, $\pi\approx 4\times 0{,}784\,73\approx 3{,}138\,92$.

89 **Test A**



$$P_{T_1}(M)=\frac{P(T_1\cap M)}{P(T_1)}=\frac{P(T_1\cap M)}{P(T_1\cap M)+P(T_1\cap\overline{M})}$$

$$P_{T_1}(M)=\frac{0{,}8\times\frac{1}{200}}{0{,}8\times\frac{1}{200}+0{,}05\times\frac{199}{200}}\approx 0{,}074.$$

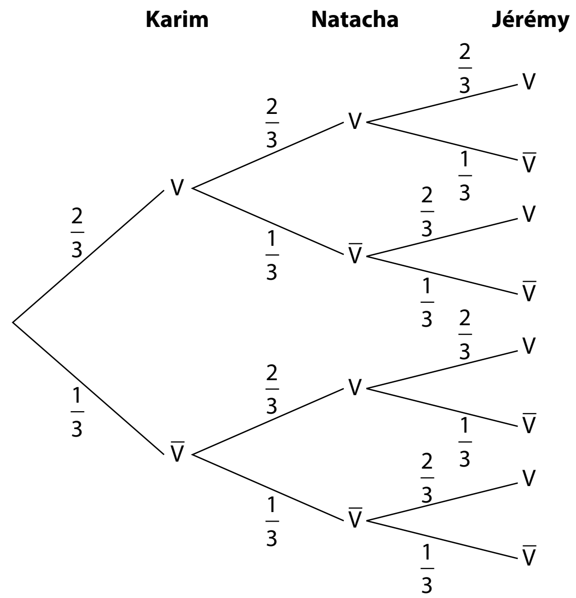
Test B

On procède de la même façon et on obtient :

$$P_{T_2}(M)=\frac{0{,}95\times\frac{1}{200}}{0{,}95\times\frac{1}{200}+0{,}1\times\frac{199}{200}}\approx 0{,}046.$$

La valeur prédictive positive du test B est donc inférieure à celle du test A.

90 On schématise la situation par un arbre pondéré où V est l'événement « La personne dit la vérité ».



La probabilité qu'Assma ait réellement gagné au loto est $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.

91 Pour chaque question, la probabilité :

• qu'Enzo et Théo répondent correctement est :

$$0{,}8 \times 0{,}6 = 0{,}48$$

• qu'Enzo et Théo se trompent est :

$$0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}08$$

• que le jeu continue est donc :

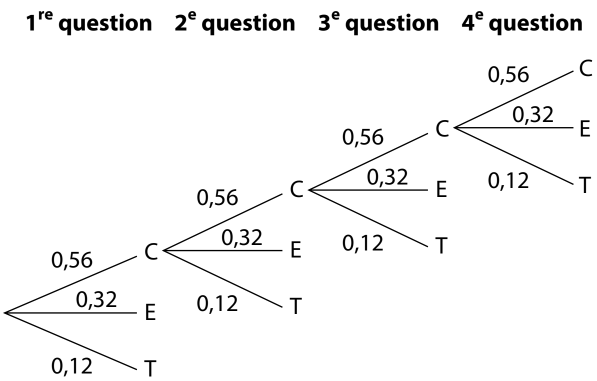
$$0{,}48 + 0{,}08 = 0{,}56.$$

• qu'Enzo gagne est :

$$0{,}8 \times 0{,}4 = 0{,}32$$

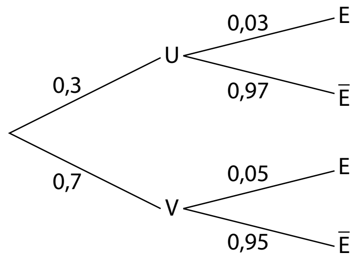
• que Théo gagne est :

$$0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}12.$$



La probabilité qu'Enzo soit gagnant à la 4e question est $0{,}56^3 \times 0{,}32$ soit environ 0,056.

92 **1. a)** On représente la situation par un arbre pondéré.



Les événements U et V forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(E) = P(U \cap E) + P(V \cap E)$

$P(E) = 0{,}03 \times 0{,}3 + 0{,}05 \times 0{,}7$

$P(E) = 0{,}044.$

La probabilité que le paquet prélevé porte le label « extrafin » est égale à 0,044.

b) $P_E(U) = \frac{P(U \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}03 \times 0{,}3}{0{,}044} \approx 0{,}205.$

Sachant qu'un paquet porte le label « extrafin », la probabilité que le sucre qu'il contient provienne de l'exploitation U est environ égale à 0,205.

2. On note p la probabilité de U.

$$P_E(U) = \frac{P(U \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}03 \times p}{0{,}03 \times p + 0{,}05(1-p)} = 0{,}3$$

ce qui est successivement équivalent à

$0{,}03p = 0{,}3(0{,}03p + 0{,}05(1-p))$

$0{,}03p = 0{,}009p + 0{,}015 - 0{,}015p$

$0{,}036p = 0{,}015$

$p = \frac{5}{12}.$

$\frac{5}{12}$ de son approvisionnement doit provenir de l'exploitation U et $\frac{7}{12}$ de l'exploitation V.

Exploiter ses compétences

93 Lorsque le joueur choisit, il a une chance sur 3 de désigner la bonne porte. Il avait donc 2 chances sur 3 de désigner une mauvaise porte.

S'il garde son choix, la probabilité de gagner est $\frac{1}{3}$.

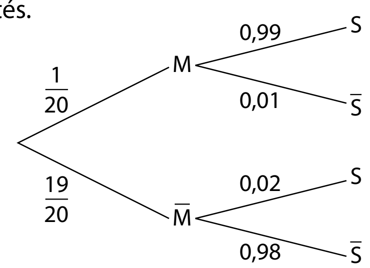
S'il modifie son choix, il gagne si son choix initial était perdant, donc avec une probabilité de $\frac{2}{3}$.

Il a donc intérêt à changer.

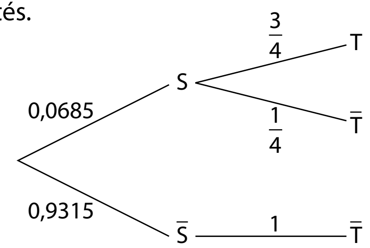
94 On note :

M l'événement « Le voyageur passe le portique avec un objet métallique ».

S l'événement « Le portique de sécurité sonne »,
T l'événement « L'agent de sécurité trouve un objet métallique sur le voyageur ».
On représente la situation par un arbre pondéré de probabilités.

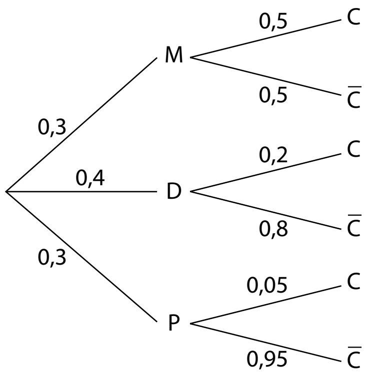


D'après la formule des probabilités totales :
$P(S) = P(M) \times P_M(S) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(S)$
$P(S) = \dfrac{1}{20} \times 0{,}99 + \dfrac{19}{20} \times 0{,}02$
$P(S) = 0{,}068\,5.$
On peut construire alors un autre arbre pondéré de probabilités.

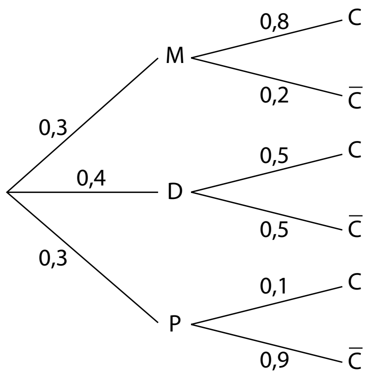


Ainsi, $P(T) = P(S) \times P_S(T) = 0{,}068\,5 \times \dfrac{3}{4}$
$P(T) = 0{,}051375.$
La probabilité que l'agent de sécurité trouve un objet métallique sur ce voyageur est $0{,}051375$.

95 On note :
M l'événement « L'espèce animale choisie est menacée »,
D l'événement « L'espèce animale choisie est en danger »,
P l'événement « L'espèce animale choisie est peu menacée »,
C l'événement « L'espèce animale choisie va disparaître d'ici cinquante ans ».
On représente la situation par un arbre pondéré de probabilités par le **modèle écologique**.



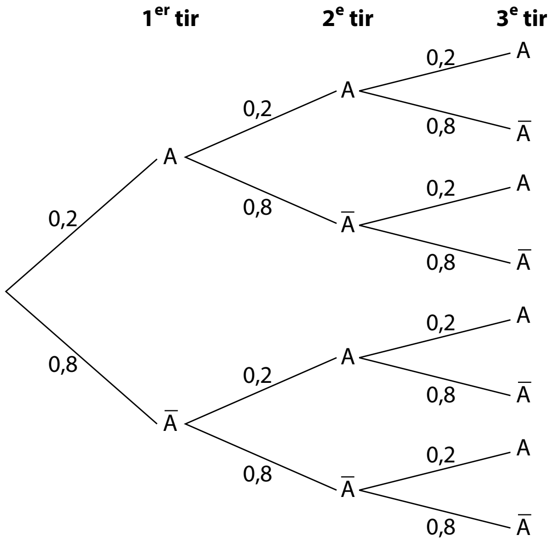
D'après la formule des probabilités totales :
$P(C) = P(M) \times P_M(C) + P(D) \times P_D(C) + P(P) \times P_P(C)$
$P(C) = 0{,}3 \times 0{,}5 + 0{,}4 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}05$
$P(C) = 0{,}245.$
On représente à nouveau la situation par un arbre pondéré pour le **modèle actuel**.



D'après la formule des probabilités totales :
$P(C) = P(M) \times P_M(C) + P(D) \times P_D(C) + P(P) \times P_P(C)$
$P(C) = 0{,}3 \times 0{,}8 + 0{,}4 \times 0{,}5 + 0{,}3 \times 0{,}1$
$P(C) = 0{,}47.$
Finalement, la probabilité pour qu'une espèce animale choisie au hasard ait disparu d'ici 50 ans est de 0,245 selon le modèle écologique et de 0,47 selon le modèle actuel.

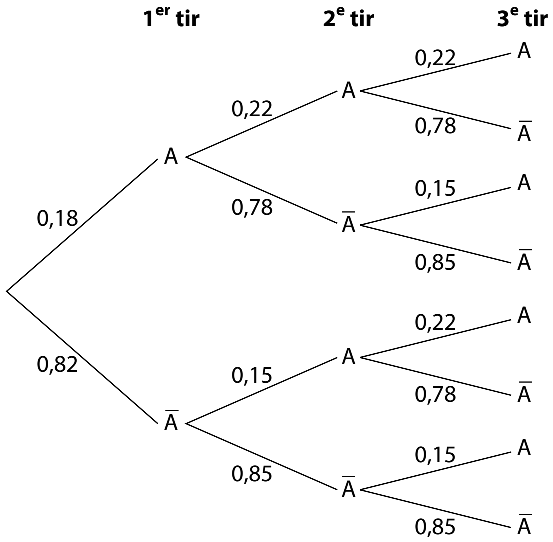
96 On note :
A l'événement « La gardienne a arrêté le tir au but »
T l'événement « La gardienne a arrêté au moins l'un des trois premiers tirs au but ».
Donc $\overline{T}$ est l'événement « La gardienne n'a arrêté aucun des trois premiers tirs au but ».
On représente la situation pour chaque gardienne par un arbre pondéré de probabilités.

Gardienne de l'équipe rouge.



$\overline{T}$ correspond au dernier chemin sur l'arbre, donc $P(\overline{T}) = 0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}8 = 0{,}512$.
Ainsi, $P(T) = 1 - P(\overline{T}) = 0{,}488$.
La probabilité que la gardienne de l'équipe rouge arrête au moins l'un des trois premiers tirs au but est 0,488.

Gardienne de l'équipe bleue.



$\overline{T}$ correspond au dernier chemin sur l'arbre, donc $P(\overline{T}) = 0{,}82 \times 0{,}85 \times 0{,}85 = 0{,}592\,45$.
Ainsi, $P(T) = 1 - P(\overline{T}) = 0{,}407\,55$.
La probabilité que la gardienne de l'équipe bleue arrête l'un des trois premiers tirs au but est 0,407 55.